الفيزياء الرياضية
المحاضرة الاولى

قسم الرياضيات
المرحلة الثانية

الفصل الاول

المتجهات Vectors Part (1)

1. المقدمة Introduction

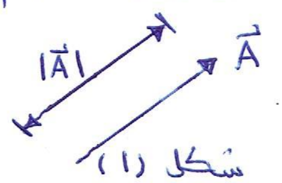
يعتبر علم الفيزياء من العلوم التجريبية التي تطورت بالتجارب العلمية ووضع النتائج في صورة نظرية ومعادلات رياضية وتبقى هذه النظريات صالحة طالما تحقق نتائج التجارب التي تجرى. ويقوم علم الفيزياء على القياسات measurements التي تجرى على الظواهر من ذلك يعتبر علم الفيزياء علم تجربة وقياس.

الكميات في الفيزياء نوعين. النوع الاول مثل درجة الحرارة والكتلة والتي لها مقدار فقط تمثل برقم يمثل مقدارها مع وحدة مناسبة ولذلك تسمى بالمقادير الحدية. في الوقت ذاته هنالك بعض المقادير الفيزيائية لديها مقدار واتجاه. المقدار يمكنه ان يتزايد او يتناقص وكذلك الاتجاه يمكن ان ينعكس او يتغير قليلا.

القوة هي احد المقادير الفيزيائية التي لديها اتجاه ومقدار محددين وتقاس بوحدة النيوتن. عندما تؤثر قوتين على جسم ما فان مجموع القوتين تعتمد على مقدارهما واتجاههما. الازاحة، السرعة، التعجيل، الزخم جميعها مقادير اتجاهية تمثل بمقدار واتجاه ووحدة فيزيائية.

2- خواص المتجهات

المتجه هو الكمية التي لها مقدار واتجاه. لنفرض ان لدينا المتجه $\vec{A}$ قيمته هي $|\vec{A}|$. يمكن ايضا تمثيل المتجه هندسيا باستخدام الاسهم، حيث ان طول السهم يمثل مقدار المتجه الحدي واتجاه السهم هو اتجاه المتجه لاحظ شكل (1)



شكل (1)

٢- جمع المتجهات

يمكن جمع المتجهات التي تعبر عن كميات فيزيائية متشابهة مثل جمع متجهين للقوة، ولكن لا يمكن ان نجمع متجه قوة مع متجه سرعة.

بصورة عامة لجمع المتجه $\vec{A}$ مع المتجه $\vec{B}$ تكون محصلة الجمع المتجه R لكنها تختلف حسب موقع المتجهين المراد جمعهما بالنسبة لبعضهما.

الحالة الاولى: عندما يكون المتجهان متوازيان:

* متجهين متوازيين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ لديهما نفس المقدار والاتجاه او حتى غير متساويين بالمقدار لكن لهما نفس الاتجاه

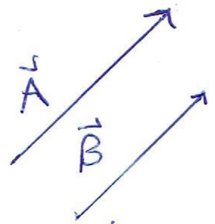


Fig (2)

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

واتجاه $\vec{R}$ هو نفس اتجاه $\vec{A}$, $\vec{B}$

* المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متوازيين لكن متعاكسان في الاتجاه

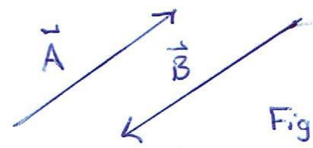


Fig (3)

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$$

واذا كانت $\vec{A}=\vec{B}$ فان $\vec{R}=0$

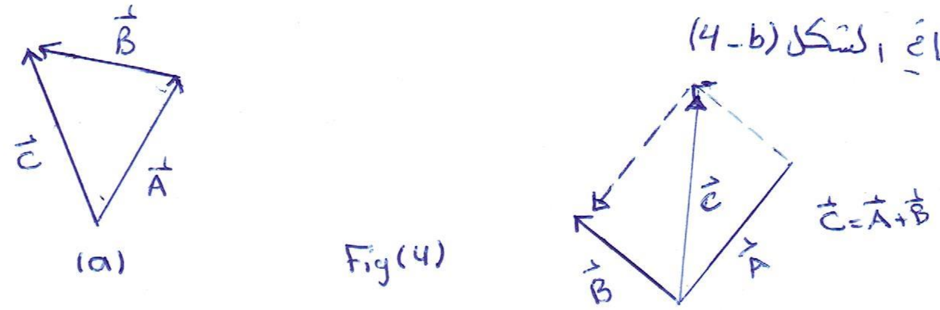
واذا كانا غير متساويين فان اتجاه $\vec{R}$ يأخذ اتجاه المتجه الاكبر.

الحالة الثانية: في حالة عدم التوازي.

لنفترض المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نعرف متجه جديد هو $\vec{C}$ والذي يمثل متجه الجمع لكل من $\vec{A}$ و B. يمكن ان نمثل عملية الجمع هندسياً كما في الشكل (4)

حيث من رأس المتجه $\vec{A}$ نرسم المتجه $\vec{B}$ و المتجه الذي يبدأ من ذيل $\vec{A}$ وينتهي عند

رأس $\vec{B}$ يمثل متجه الجمع $\vec{C}$ ، هنالك طريقة مكافئة لهذه الطريقة وهي ان نرسم المتجه $\vec{A}$ ومن ذيل المتجه $\vec{A}$ نبدأ برسم المتجه $\vec{B}$ بعدها لكل متجه نرسم متجه موازي ومساوي بالمقدار بحيث يتكون شكل متوازي اضلاع قطره يمثل محصلة الجمع $\vec{C}$ كما في الشكل (4-b)



Fig(4)

عملية الجمع لها خواص يمكن تلخيصها كمايلي :

١- انها عملية ابدالية

$$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$$

٢- تنطبق عليها خاصية التجميع

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

٣- عنصر الوحدة هو المتجه $\vec{0}$

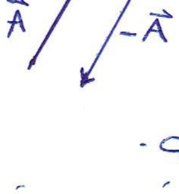
$$\vec{0}+\vec{A} = \vec{A}+\vec{0} = \vec{A}$$

٤- لكل متجه $\vec{A}$ معكوسه $-\vec{A}$.

$$-(\vec{A}) = -\vec{A}$$

$$\vec{A}+(-\vec{A}) = 0$$

اي ان المتجه (A-) له نفس مقدار المتجه $\vec{A}$ لكنه يعاكسه بالاتجاه



Fig(5)

ب- ضرب المتجه بمقدار عددي.

يمكن ضرب المتجه بمقدار حقيقي (عدد حقيقي) بحيث ان

$$c\vec{A} = \vec{A}c$$

اذا كان الحد الحقيقي c عدد حقيقي موجب ($c > 0$) فان المتجه الناتج بنفس اتجاه ($\vec{A}$) بينما اذا كان ($c<0$) فان ($-c\vec{A}$) تكون بعكس اتجاه المتجه $\vec{A}$. شكل (6)

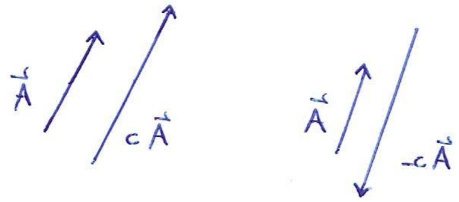


Fig (6)

خواص الضرب بعدد حقيقي:

١- عملية ابدالية $\vec{A}c = c\vec{A}$

٢- تنطبق عليها خاصية التجميع $b(c\vec{A}) = (bc)\vec{A} = c(b\vec{A})$

٣- ينطبق عليها قانون التوزيع

* الحالة الاولى $c(\vec{A}+\vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$
* الحالة الثانية $(b+c)\vec{A} = b\vec{A} + c\vec{A}$

٤- عنصر الوحدة هو (1) $1\vec{A} = \vec{A}1 = \vec{A}$

3- تطبيقات المتجهات

عند تطبيق المتجهات على المقادير الفيزيائية يجب الاخذ بنظر الاعتبار العلاقات سابقة الذكر . ما يهمنا هو تطبيقات المقادير الفيزيائية مثل السرعة، الازاحة، التعجيل، القوة، الدفع، العزم، الزخم والزخم الزاوي كمتجهات . لايمكن جمع القوة مع السرعة، او طرح العزم من الزخم. لذا يجب دائماً ان نفهم المحتوى الفيزيائي للمقدار المتجه كذلك بدلاً من حفظ المتجهات كقوانين رياضية يجب ان نفهم الخواص التالية لتمثيل المقادير الفيزيائية كمتجهات .

١- يمكن ان يتواجد المتجه عند اي نقطة P في الفراغ .

٢- المتجه يملك مقدار واتجاه .

٣- يمكن ان تتساوى المتجهات : اي متجهين يمكن ان يتساويا ان عندما يملكان نفس

المقدار والاتجاه في اي مكان في الفراغ .

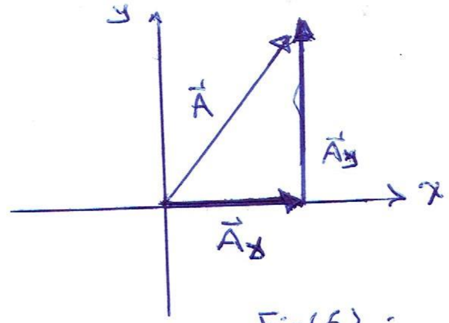
٤- يمكن تحليل المتجهات :

نختار اي نظام احداثي له نقطة اصل واحداثيات . بمكننا ان نحلل المتجه الى مركبات على طول كل محور من محاور النظام الاحداثي . في شكل (6) اخترنا النظام الكارتيزي على طول المستوى (y-x) باهمال المستوى (z) للسهولة . المتجه $\vec{A}$ عند النقطة P يمكن تحليله الى متجه جمع

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

حيث ان $\vec{A}_x$ هي مركبة المتجه $\vec{A}$ باتجاه محور x الموجب او السالب.

A_y هي مركبة المتجه $\vec{A}$ باتجاه محور y الموجب او السالب.



Fig(6) .

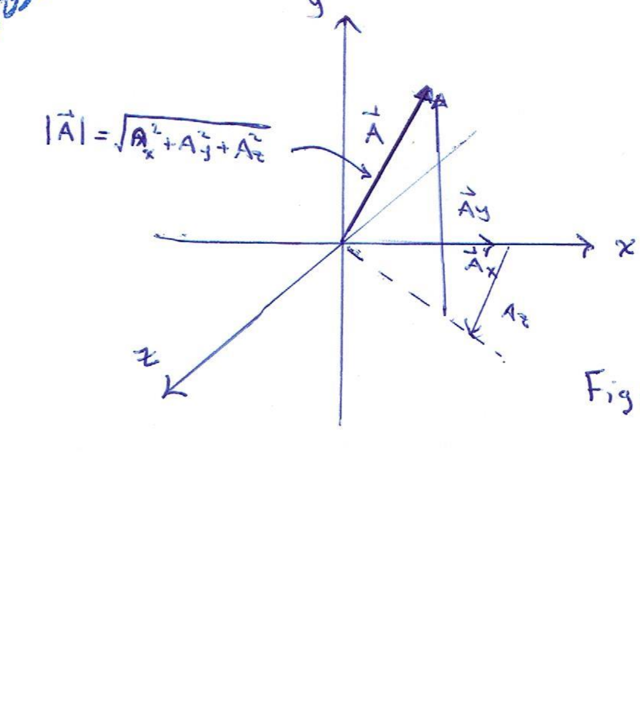
٥- متجه الوحدة :

باستخدام خاصية الضرب نجد حقيقة مكتشفة من تعريف مجموعة من متجهات الوحدة عند كل نقطة في الفراغ . لاي نقطة P في الفراغ هناك ثلاث متجهات وحدة $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$.

متجه الوحدة يقصد به ان قيمته تساوي (1) اي ان : $|\hat{i}|=|\hat{j}|=|\hat{k}| = 1$

حيث $\hat{i}$ هو متجه الوحدة باتجاه المحور x عند النقطة P ، و متجهات الوحدة $\hat{j}$ و $\hat{k}$ كذلك هي متجهات الوحدة باتجاه المحور y و z عند النقطة P على التوالي . شكل (7)

مدرس مساعد
[illegible]



Fig(7)

٦- عناصر المتجه.

بعد تعريف المتجهات، يمكننا ان نعرف مركبة x و y للمتجه. لنستخدم طريقة تحليل المتجه. $\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y$ من هنا يمكن ان نمثل $\vec{A}_x$ كالتالي

$$\vec{A}_x = A_x \hat{i}$$

من العلاقة اعلاه A_x تمثل مركبة x للمتجه A . هذه المركبة يمكن ان تأخذ قيمة سالبة او موجبة او حتى صفر. وهي لا تمثل متجه $\vec{A}_x$ والتي تحسب $\sqrt{A_x^2}$. يجب ان يلاحظ الفرق بين A_x و $\vec{A}_x$.

بالطريقة نفسها يمكن ان نمثل مركبات المحور y و z

$$\vec{A}_z = A_z\hat{k} \qquad \vec{A}_y = A_y\hat{j}$$

من هنا يمكن ان نمثل المتجه $\vec{A}$ باستخدام مركباته الثلاث . $A(A_x, A_y, A_z)$ او

$$\vec{A} = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

٧- مقدار المتجه

يمكن حساب مقدار المتجه من مكوناته $A=(A_x,A_y,A_z)$ في الشكل (7) من العلاقة

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

٨- اتجاه المتجه.

لنفرض المتجه $\vec{A}=(A_x,A_y,0)$ حيث ان المركبة باتجاه المحور z تساوي صفر اي ان المتجه $\vec{A}$ يقع في المستوى x-y . اذا فرضنا ان المتجه $\vec{A}$ يصنع زاوية θ مع المتجه x بعكس اتجاه عقارب الساعة. مركبتا x و y هما :

مدرس مساعد

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\sin\theta$$

Fig(8)

يمكن كتابة المتجه في مستوى xy كما يلي

$$\vec{A} = A\cos\theta\,\hat{i} + A\sin\theta\,\hat{j}$$

اذا كانت مركبات المتجه معروفة يمكننا حساب الزاوية θ من العلاقة

$$\frac{A_y}{A_x} = \frac{A\sin\theta}{A\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

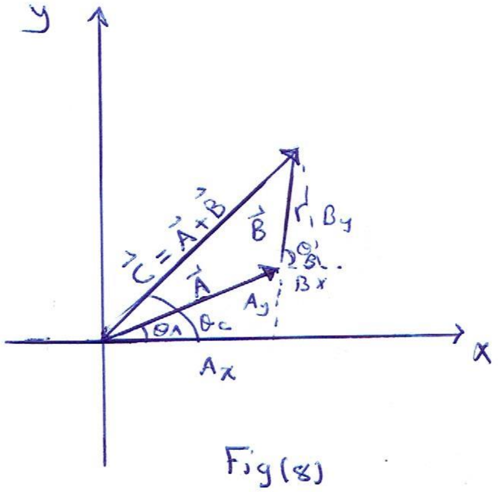
من الواضح ان اتجاه المتجه يعتمد على اشارة A_x و A_y فمثلاً اذا كان كل من $A_x > 0$ و $A_y > 0$ فان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ والمتجه يقع في الربع الاول. بينما اذا كان $A_x > 0$ و $A_y < 0$ فان $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$ والمتجه يقع في الربع الرابع.

٩- جمع المتجهات.

لنفرض المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ في المستوى y-x ولنفترض ان θ_A و θ_B تمثل الزوايا التي يصنعها المتجهات $\vec{A}$,$\vec{B}$ مع محور x الموجب باتجاه عكس عقارب الساعة.

$$\vec{A} = A\cos\theta_A\,\hat{i} + A\sin\theta_A\,\hat{j}$$
$$\vec{B} = B\cos\theta_B\,\hat{i} + B\sin\theta_B\,\hat{j}$$

في الشكل (8) المتجه $\vec{C}$ هو حاصل جمع $\vec{A}+\vec{B}$. اذا فرضنا ان θ_c هي الزاوية التي يصنعها متجه الجمع $\vec{C}$ مع المحور x الموجب.



Fig(8)

لذا فان $\vec{C}$ تعطى بالعلاقات :

$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y$$

وبدلالة الزوايا

$$C_x = C\cos\theta_c = A\cos\theta_A + B\cos\theta_B$$

$$C_y = C\sin\theta_c = A\sin\theta_A + B\sin\theta_B$$

$$\Longrightarrow \vec{C} = (A_x + B_x)\,\hat{i} + (A_y + B_y)\,\hat{j}$$

$$= C\,(\cos\theta_c\,\hat{i} + \sin\theta_c\,\hat{j})$$